

Всероссийская олимпиада школьников по МАТЕМАТИКЕ 2025-26 года

Муниципальный этап

7 класс

Инструкция по выполнению работы

В каждой из предложенных вам задач нужно написать правильный ответ. Ответ может быть числовой, может быть строкой текста или рисунком. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример. Никаких решений задач писать не нужно! Вы сдаете ТОЛЬКО бланк ответов. Условия задач можно оставить себе. Пользоваться калькулятором НЕ разрешается.

Максимальное количество баллов — 100.

Время выполнения заданий — 240 минут.

Желаем успеха!

Задания

Задача 1. Черепаха Тортилла хвастается, что разгоняется до 5 км/день. Однако она использует свою систему мер: считает, что в километре 800 м, а в сутках — 30 часов. Какова её реальная скорость в обычных км/день?

Задача 2. Вычислите $\frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7}}{\frac{3}{1} + \frac{5}{3} + \frac{7}{5}}$.

Задача 3. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого используются только цифры 2, 3 и 5, причем каждая из них хотя бы по одному разу, и которое делится нацело на 18.

Задача 4. Найдите семь последовательных **целых** чисел, таких, что сумма первых двух из них равна сумме последних трёх.

Задача 5. Робот-уборщик обнаружил на орбите сгусток из 210 болтов и гаек. Чтобы его утилизировать, робот может за одну манипуляцию либо приварить к сгустку простое количество болтов или гаек, либо отпилить и выбросить кусок, состоящий из квадрата целого числа одинаковых элементов (если такое количество в сгустке есть). За какое минимальное число манипуляций робот может превратить сгусток в один элемент (болт или гайку)? Напомним, что натуральное число, большее 1, называется простым, если оно делится только на 1 и на само себя.

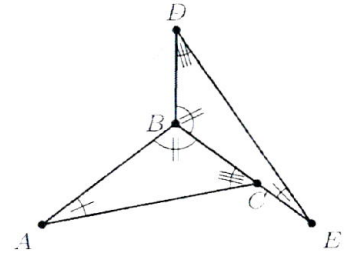
Задача 6. У Андрея в двух банках лежали некоторые суммы денег. Андрей дополнительно внес одну и ту же сумму денег на счет в каждом банке. После этого сумма вклада в первом банке стала составлять 70% от суммы вклада во втором. Затем Андрей еще раз внес такую же сумму на оба счета, и после этого сумма вклада в первом банке стала составлять уже 80% от суммы вклада во втором. Во сколько раз сумма вклада во втором банке изначально была больше, чем в первом?

Задача 7. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между семью цифрами 9 1 1 2 0 2 5 знаки арифметических действий (+, −, ×, ÷) так, чтобы значение получившегося выражения стало равно 151. Можно использовать скобки. В ответ запишите все выражение целиком. Цифры можно объединять в числа.

Задача 8. В хоккейном чемпионате участвовали 24 команды. Они были разбиты на две конференции по 12 команд, а каждая конференция разбита на два дивизиона по 6 команд. Каждая команда играла по 6 раз со всеми командами из своего дивизиона, по 4 раза со всеми командами из своей конференции, но не из своего дивизиона, и по 2 раза со всеми командами другой конференции. Сколько всего игр было в этом чемпионате?

Задача 9. Робот выполняет команды «В» (вперёд) и «С» (стоп). Выполнив очередную команду, он дописывает ее букву в журнал. Тем самым, после выполнения всех команд, в его журнале оказывается записана последовательность букв, каждая из которых — В или С. В этой последовательности пара подряд идущих букв «СВ» встречается 8 раз. При этом тройка подряд идущих букв «СВС» встречается 3 раза, а тройка «СВВ» — 4 раза. Какими могут быть последние две команды в журнале? Если возможных ответов больше одного, укажите их все.

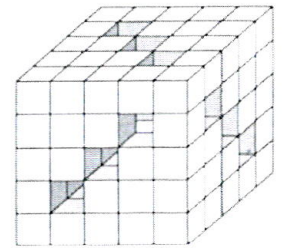
Задача 10. На рисунке изображены два равных треугольника: ABC и EBD . Оказалось, что $\angle DAE = \angle DEA = 37^\circ$. Найдите угол BAC . Картинка приведена только для пояснения, длины отрезков и углы на ней не соответствуют условию задачи.



Задача 11. Паша придумал два различных натуральных числа и посчитал их произведение. Затем он увеличил каждое из придуманных чисел на 3, и снова посчитал их произведение. Оказалось, что оно увеличилось на 21. Чему равно произведение двух новых чисел?

Задача 12. В танцевальной студии занимаются 10 мальчиков и 10 девочек. Из них нужно выбрать два мальчика и две девочки, чтобы отправить на соревнования. Сколькими способами можно это сделать?

Задача 13. Миша играл в Майнкрафт и собирал из одинаковых кубических блоков конструкцию, показанную на рисунке. Эта конструкция представляет из себя куб $5 \times 5 \times 5$ с девятью сквозными прямыми туннелями, проходящими от грани до грани куба. Весь остальной объем, кроме туннелей, заполнен блоками. Сколько блоков использовал Миша?



Задача 14. Сколько существует натуральных чисел, у которых неполное частное от деления на 2025 равно остатку?

Задача 15. В школе 60% детей любят математику, а остальные не любят. Среди тех, кто любит математику, 80% говорят, что любят ее, а остальные говорят, что не любят. Среди тех, кто не любит математику, 90% говорят, что не любят ее, а остальные говорят, что любят. Какова доля тех, кто любит математику, среди тех учеников, которые говорят, что не любят ее? Ответ можно дать в виде дроби, или в процентах.

Задача 16. Даша написала программу, которая выводит по возрастанию все натуральные числа, кубы которых делятся на 2025. Какое число выведет Дашина программа 2025-м по счету?

Задача 17. Все десять натуральных чисел от 1 до 10 расставлены по кругу. а) (2 балла) Для какого наименьшего натурального числа N существует такая расстановка этих десяти чисел, в которой любые два соседних числа отличаются не больше, чем на N ? б) (3 балла) Приведите пример такой расстановки для найденного числа N .

Задача 18. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL . На стороне AB отмечена точка E , а на отрезке BL — точка D . Известно, что $DL = LC$, а отрезок ED параллелен стороне AC . Найдите длину отрезка ED , если $AE = 25$, $AC = 19$.

Задача 19. Пятизначное число делится на 7. Какую наибольшую сумму цифр оно может иметь?

Задача 20. Дима задумал натуральное число, которое делится на 10 и имеет ровно 10 натуральных делителей (включая 1 и само число). Какое число мог задумать Дима? Если у задачи несколько ответов, укажите их все.

8 класс

1. В физкультурном зале находятся тренер и несколько спортсменов. Возраст тренера на 40 лет больше среднего возраста спортсменов и на 35 лет больше среднего возраста всех присутствующих (включая его самого). Сколько спортсменов в зале?
2. Могут ли суммы цифр двух соседних натуральных чисел (то есть чисел n и $n + 1$) отличаться *а)* на 2024?; *б)* на 2025?
3. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \dots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \dots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наименьшей*, и укажите её значение.
4. Пятьдесят команд сыграли однокруговой турнир за 49 дней, каждая команда сыграла с каждой, играя по одному матчу в день. За победу в матче давали 3 очка, а за ничью – одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа её поражений, либо вдвое меньше числа её побед. Больше всех очков набрал «Зенит». Докажите, что и за два дня до конца соревнования у «Зенита» очков было больше, чем у любой другой команды.
5. В треугольнике ABC угол C равен 60° . Биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AB = AQ + BP$.

Продолжительность олимпиады — 4 часа.

Максимальное число баллов за задачу — 7 баллов.

Максимальное число баллов за все задачи — 35 баллов.

9 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

2. Из девяти карточек с цифрами $1, 2, \dots, 9$ составляют девятизначное число (каждая цифра используется ровно один раз). Затем вычисляют сумму всех двузначных чисел, образованных соседними цифрами этого числа. Например, для числа 198237456 сумма равна $19 + 98 + 82 + 23 + \dots + 56 = 434$. Найдите расположение цифр, при котором такая сумма будет *наибольшей*, и укажите её значение.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 400?

4. На вечеринке собрались 10 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

5. Окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K . Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

Продолжительность олимпиады — 4 часа.

Максимальное число баллов за задачу — 7 баллов.

Максимальное число баллов за все задачи — 35 баллов.

10 класс

1. Сколько существует 10-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 7?
2. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдётся такое действительное число y , что $f(x) = f(y) + y$. Найдите наименьшее возможное значение a .
3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 800?
4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?
5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q , причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — 4 часа.

Максимальное число баллов за задачу — 7 баллов.

Максимальное число баллов за все задачи — 35 баллов.

11 класс

1. Сколько существует 11-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 8?
2. Все члены геометрической прогрессии — целые числа. Верно ли, что сумма квадратов а) трёх; б) четырёх последовательных членов этой прогрессии всегда делится на сумму этих членов?
3. Пусть x, y, z — различные целые числа такие, что $xy + yz + zx = 47$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?
5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q , причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Продолжительность олимпиады — 4 часа.

Максимальное число баллов за задачу — 7 баллов.

Максимальное число баллов за все задачи — 35 баллов.